



№3-дәріс.

**Тақырыбы: Квадраттық иррационалдықты
интегралдау. Дербес жағдайлар**

Кейбір иррационал өрнектерді интегралдау.

1-жағдай. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ есепте, мұндағы a, b, c, d – тұрақты сандар, m – натурал сан, $ad - bc \neq 0$, $R(x, y)$ – рационал функция.

$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ белгілеуі интеграл астындағы өрнекті рационал функцияға әкелетіндігін көрсетеміз.

Шынында да, $x = \frac{b - dt^m}{ct^m - a}$, $dx = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2} dt$ болғандықтан,

$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{b - dt^m}{ct^m - a}, t\right) \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2} dt = \int R_1(t) dt$, мұндағы $R_1(t)$ – рационал функция.

• $\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$ интегралын есепте.

• Мынадай белгілеу енгіземіз: $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$, $x-1 = \frac{2}{t^3-1}$,
нәтижесінде:

$$\int t \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \cdot \frac{(t^3-1)^2}{4} dt = -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + C = -\frac{3}{8} \cdot \frac{x+1}{x-1} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

• Бұл түрдегі интегралдарға $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots) dx$ интегралы да жатады, белгілеуінің арқасында интеграл астындағы өрнек рационал функцияға келеді, мұндағы k – барлық x бөлшек көрсеткіштерінің ортақ бөлімі.

Мысал 1.

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx$$

тап. Мынадай белгілеу енгізсек: $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$,

$$\int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt = 4 \left(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\operatorname{arctg}t + C.$$

Х айнымалысына қайта оралсақ, ізделінді интегралдың жауабына келеміз:

$$4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x}) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

Мысал 2.

- Мына түрдегі интеграл астындағы иррационал функцияны тригонометриялық ауыстыруларды қолданып, рационал функцияның интегралына әкелеміз:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad x = a \sin t$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad x = atgt$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad x = a \operatorname{sect}.$$

2-жағдай.

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx = \left| x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt \right| = \int \frac{\sqrt{(4-4 \sin^2 t)^3}}{64 \sin^6 t} 2 \cos t dt = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^2 t} dt =$$
$$= -\frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^4 t d \operatorname{ctg} t = -\frac{1}{20} \operatorname{ctg}^5 t + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

Мысал 3.

- Интеграл $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегралын $x-\alpha = \frac{1}{t}$ шешу үшін белгілеуін енгіземіз.

3-жағдай.

• $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$ тап.

Мына белгілеулерді енгізсек $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2 - 2x - 1} = \frac{\sqrt{1 - 2t - t^2}}{t}$,

онда $-\int \frac{dt}{\sqrt{2 - (t+1)^2}} = -\arcsin \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

Мысал 4.